

# Technomathematik

## Angewandte Mathematik zwischen Informatik und Ingenieurwissenschaften

**Michael Schuster**

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg (FAU),  
Department Mathematik  
Chair for Dynamics, Control, Machine Learning and Numerics

### **Was ist Technomathematik?** (engl.: Industrial Mathematics)

- Interdisziplinäres Studium, das Mathematik und technische Anwendung miteinander verbindet
- Anwendungsspezifische Ausbildung in Mathematik (ca. 60%), Informatik (ca. 20%) und einem Studienfach der Ingenieurwissenschaften (ca. 20%)
- Ziel ist die Entwicklung mathematischer Modelle und Simulationen für komplexe technische Herausforderungen
- Gefragt ist besonders die Fähigkeit zur Kommunikation mit den Ingenieur\*innen

### Mathematische Inhalte im Technomathematikstudium

- **Differentialgleichungen:** Theorie und Anwendung von Differentialgleichungen zur Modellierung von realen, dynamischen Prozessen
- **Numerische Mathematik:** Numerische Methoden und Verfahren zur Lösung mathematischer Probleme mit Computern
- **Mathematische Modellierung:** Mathematische Darstellung realer Probleme zum besseren Verständnis und zur Entwicklung von Lösungsverfahren
- **Optimierung:** Theorie, Anwendung und algorithmische Verfahren zur mathematischen Optimierung von Prozessen und Systemen
- **Statistik und Big Data:** Analyse, Interpretation und Modellierung großer Datenmengen, um Erkenntnisse zu gewinnen und fundierte Anwendungsentscheidungen zu treffen

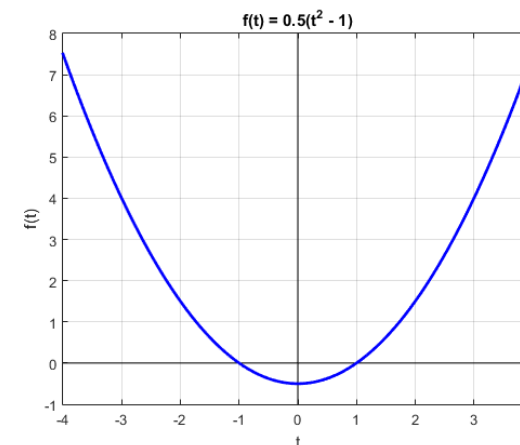
Lösen und Umstellen von Gleichungen:

$$y = a (x - b)^2 + e \quad \iff \quad \sqrt{\frac{y - e}{a}} + b = x$$

$$y = c a^x \quad \iff \quad \log_a \left( \frac{y}{c} \right) = x$$

Was, wenn die Unbekannte keine Zahl, sondern eine Funktion ist?

$$f(t)^2 - \frac{1}{4} = \int_0^t x^3 - x \, dx$$
$$\implies f(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$



Was, wenn nicht nur eine Funktion, sondern auch deren Ableitung in der Gleichung vorkommt?

$$f(x) + f'(x) = 0$$

⇒ Wir können  $f(x) = e^{-x}$  als Lösung „erraten“.

### Differentialgleichung

Eine *Differentialgleichung* ist eine Gleichung mit Funktionen einer oder mehreren Variablen, die auch Ableitungen dieser Funktionen enthält.

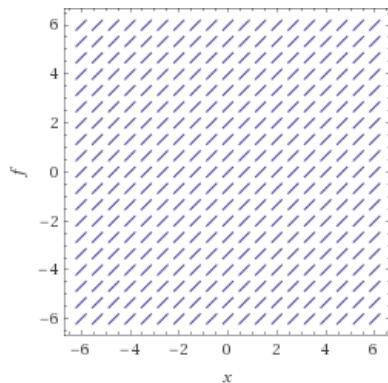
### Differentialgleichung

Eine *Differentialgleichung* ist eine Gleichung mit Funktionen einer oder mehreren Variablen, die auch Ableitungen dieser Funktionen enthält.

Beispiel Differentialgleichung:

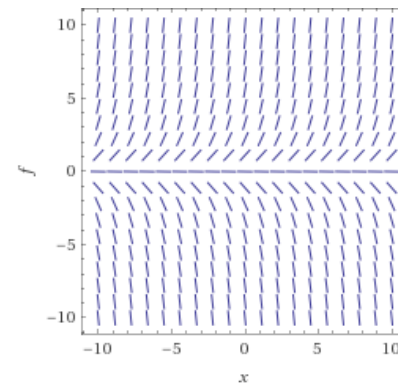
$$f'(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f(x) = a x + c$$



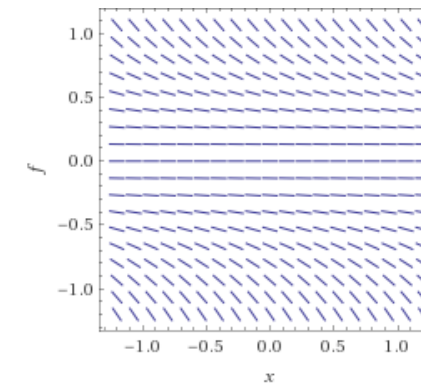
$$f'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = c e^x$$



$$f'(x) = -f(x)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (x + c)^{-1}$$



Um die Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = c e^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

exakt zu bestimmen, benötigen wir mehr Informationen.

### Anfangswertproblem

Ein Problem der Form

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(t, f(t)) \\ f(t_0) &= f_0 \end{aligned}$$

heißt *Anfangswertproblem* (AWP).

Bevor wir die Lösung bestimmen, als **Mathematiker** fragen wir zuerst:

Für gegebenes  $g, t_0, f_0$ , **existiert** eine Lösung für das AWP und falls ja, ist diese Lösung **eindeutig**?

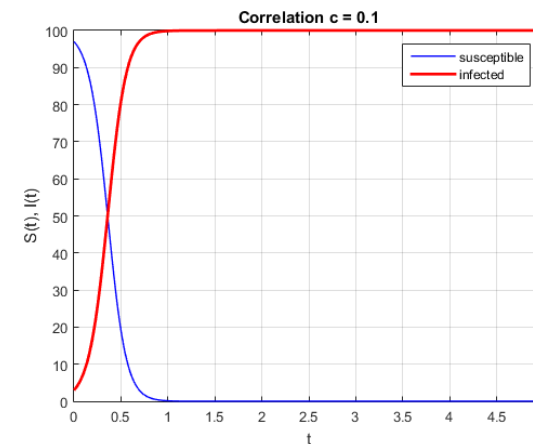
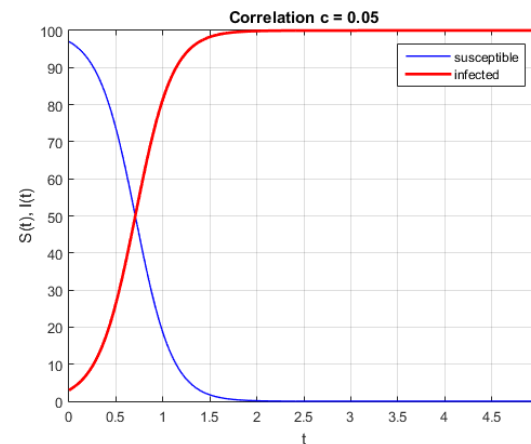
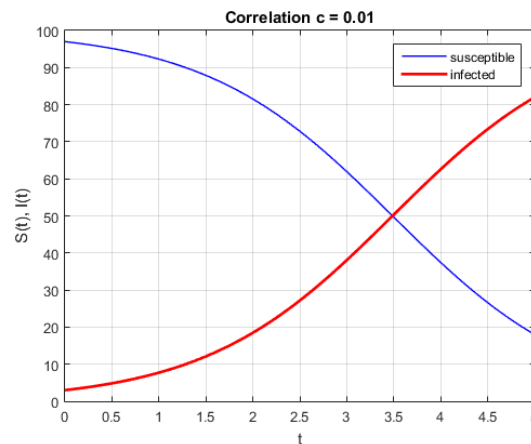
## Beispiel: SI-Modell

### Beispiel: Krankheitsausbreitung - SI-Modell (susceptible-infected model)

Sei  $N(t)$  die (konstante) Bevölkerungsgröße, sei  $S(t)$  die Anzahl der gesunden, aber anfälligen Personen und sei  $I(t)$  die Anzahl der infizierten Personen jeweils zum Zeitpunkt  $t$ .

$$(SI) \quad \begin{cases} S'(t) = -c I(t) S(t) \\ I'(t) = c I(t) S(t) \end{cases}$$

Die Konstante  $c$  ist ein Maß für die Wechselwirkung zwischen den Personen. Von 100 Personen seien zu Beginn 3 infiziert ( $t_0 = 0$ ,  $S(t_0) = 97$  und  $I(t_0) = 3$ ).





$$(SI) \quad \begin{cases} S'(t) = -c I(t) S(t) \\ I'(t) = c I(t) S(t) \end{cases}$$

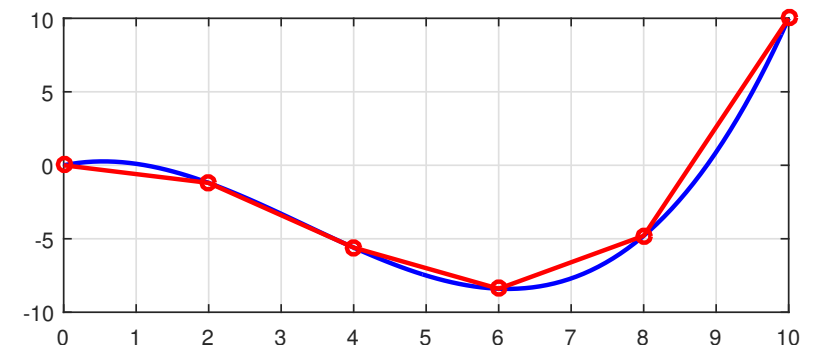
Man kann für das SI-Modell zwar die Existenz einer eindeutigen Lösung zeigen, diese kennt man aber nicht.

**Wie berechnet man dann die Lösung?**

⇒ numerische Simulation.

**Problem dabei:** Computer kann im Allgemeinen (noch) keinen Funktionsterm berechnen.

⇒ Approximation der Lösung an sog. Stützstellen,  
Zerlege das Zeitintervall  $[0, T]$  in Zeitpunkte  $t_0, t_1, \dots, t_N$



## Numerische Lösung von DGLs

$$\begin{cases} S'(t) = -c I(t) S(t) \\ I'(t) = c I(t) S(t) \end{cases}$$

Auswertung an der  
ersten Stützstellen  $\rightarrow$

$$\begin{cases} S'(t_0) = -c I(t_0) S(t_0) \\ I'(t_0) = c I(t_0) S(t_0) \end{cases}$$

Wir wissen  $S(t_0) = 97$  und  $I(t_0) = 3$ , **aber was ist  $S'(t_0)$  und  $I'(t_0)$ ?**

### Differenzialquotient

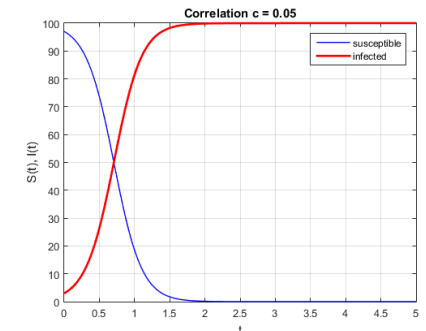
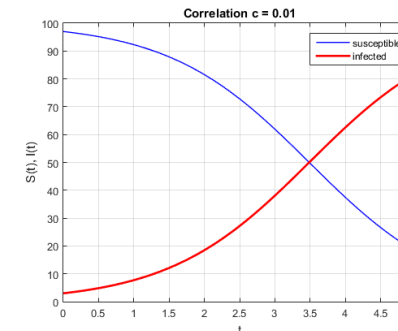
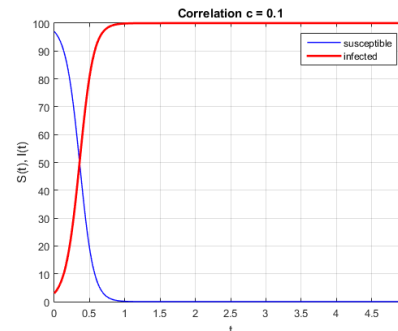
$$S'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

### Differenzenquotient

$$S'(t) \approx \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

### Nutze den Differenzenquotient:

$$\begin{cases} \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0} = -c I(t_0) S(t_0) \\ \frac{I(t_1) - I(t_0)}{t_1 - t_0} = c I(t_0) S(t_0) \end{cases}$$



### Beispiel 2: Krankheitsausbreitung - SIR-Modell (susceptible-infected-removed model)

Sei  $N(t)$  die Bevölkerungsgröße, sei  $S(t)$  die Anzahl der gesunden, aber anfälligen Personen, sei  $I(t)$  die Anzahl der infizierten Personen und sei  $R(t)$  die Anzahl der resistenten Personen jeweils zum Zeitpunkt  $t$ .

Annahme: Jede Person kann nur einmal infiziert werden, danach wird er\*sie immun oder stirbt.

$$(SIR) \quad \begin{cases} S' = \nu N - \beta \frac{S I}{N} - \mu S \\ I' = \beta \frac{S I}{N} - \gamma I - \mu I \\ R' = \gamma I - \mu R \end{cases}$$

$\gamma$ : Rate, mit der Personen genesen

$\nu$ : Geburtenrate

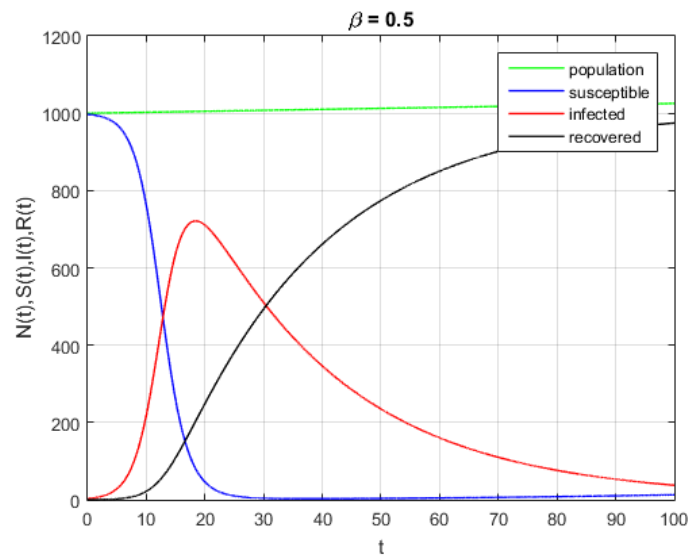
$\mu$ : Allgemeine Sterberate

$\frac{\beta}{N}$ : Transmissionsrate

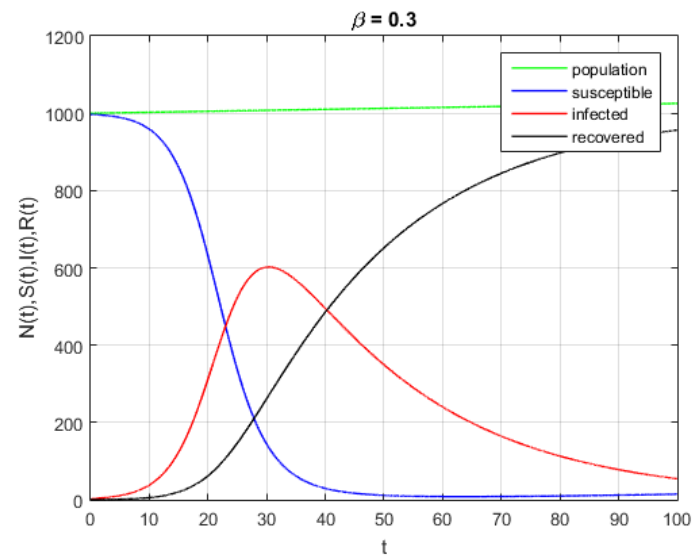
## Beispiel: SIR-Modell

Es sei  $N(0) = 1000$ ,  $S(0) = 997$ ,  $I(0) = 3$ ,  $R(0) = 0$ .

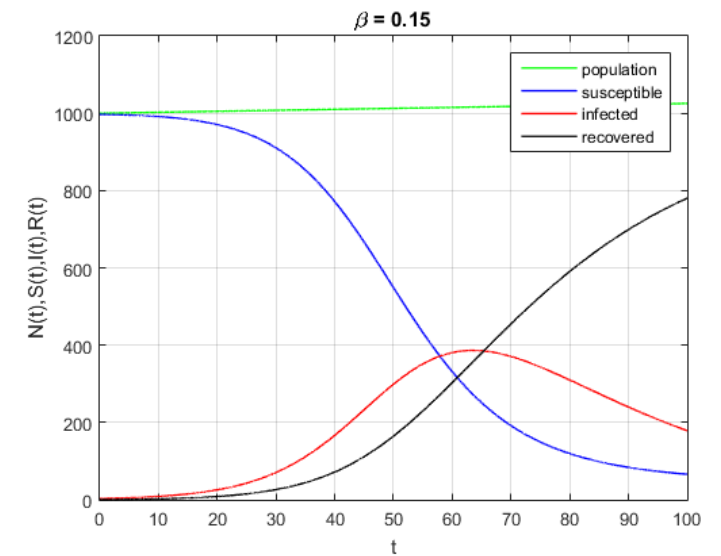
Simulationsergebnisse für  $\nu = 0.0005$ ,  $\mu = 0.00025$  und  $\gamma = 0.04$ :



$\beta = 0.5$



$\beta = 0.3$



$\beta = 0.15$

### Inhalte im Studiengang Technomathematik

- Der **mathematische Anteil** ist in den ersten Semestern identisch mit dem Studiengang Mathematik
- Dazu kommen noch Veranstaltungen aus der **Informatik** (Grundlage für die Durchführung von numerischen Simulationen)
- Ab dem 3. Semester kommt das **technische Wahlfach** als Zugang zu den Ingenieurwissenschaften dazu
- Der zugehörige Masterstudiengang heißt **Computational and Applied Mathematics**

### Aufbau des Studiengangs Technomathematik

- Der Studiengang besteht aus 180 ECTS, davon 40-45 aus Informatik und dem technischen Wahlfach
- Klassische Wahlfächer sind:
  - Maschinenbau
  - EEI - Elektrotechnik - Elektronik - Informationstechnik
  - Medizintechnik
  - CBI - Chemie- und Bioingenieurwesen
- Die Modulbeschreibungen findet man auf *www.campo.fau.de*  
-> Menü -> Studienangebot -> Modulbeschreibungen
- Für Fragen steht die Studienberatung Technomathematik gerne zur Verfügung

### Mögliche Vorlesungen aus den (technischen) Wahlfächern

Informatik	Maschinenbau	EEI	Medizintechnik	CBI
Algorithmen und Datenstrukturen 10	Dynamik starrer Körper 7.5	Elektromagnetische Felder 2.5	Informationssysteme im Gesundheitswesen 5	Einführung in die Thermofluiddynamik 5
Konzeptionelle Modellierung 5	Optik und optische Technologien 2.5	Grundlagen der Elektrotechnik I 7.5	Medizintechnik I 5	Wärme- und Stoffübertragung 2.5
Systemnahe Programmierung in C 5	Statik, Elastostatik und Festigkeitslehre 12.5	Grundlagen der Elektrotechnik II 5	Medizintechnik II 5	Grenzflächen in der Verfahrenstechnik 2.5
Einführung in die Systemprogrammierung 5	Technische Schwingungslehre 5	Grundlagen der Elektrotechnik III 5	Signale und Systeme I 5	Computeranwendungen in der Verfahrenstechnik 7.5
Parallele und Funktionale Programmierung 5			Signale und Systeme II 5	Werkstoffkunde 2.5
				Strömungsmechanik 5



Für Fragen steht die Studienberatung Technomathematik gerne zur Verfügung