

Technomathematik

Angewandte Mathematik zwischen Informatik und Ingenieurwissenschaften

Michael Schuster

Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg (FAU),
Department Mathematik
Chair for Dynamics, Control, Machine Learning and Numerics

Was ist Technomathematik? (engl.: Industrial Mathematics)

- Interdisziplinäres Studium, das Mathematik und technische Anwendung miteinander verbindet
- Anwendungsspezifische Ausbildung in Mathematik (ca. 60%), Informatik (ca. 20%) und einem Studienfach der Ingenieurwissenschaften (ca. 20%)
- Ziel ist die Entwicklung mathematischer Modelle und Simulationen für komplexe technische Herausforderungen
- Gefragt ist besonders die Fähigkeit zur Kommunikation mit den Ingenieur*innen

Mathematische Inhalte im Technomathematikstudium

- **Differentialgleichungen:** Theorie und Anwendung von Differentialgleichungen zur Modellierung von realen, dynamischen Prozessen
- **Numerische Mathematik:** Numerische Methoden und Verfahren zur Lösung mathematischer Probleme mit Computern
- **Mathematische Modellierung:** Mathematische Darstellung realer Probleme zum besseren Verständnis und zur Entwicklung von Lösungsverfahren
- **Optimierung:** Theorie, Anwendung und algorithmische Verfahren zur mathematischen Optimierung von Prozessen und Systemen
- **Statistik und Big Data:** Analyse, Interpretation und Modellierung großer Datenmengen, um Erkenntnisse zu gewinnen und fundierte Anwendungsentscheidungen zu treffen

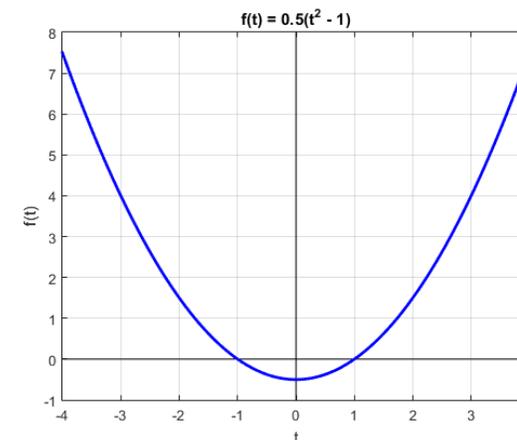
Lösen und Umstellen von Gleichungen:

$$y = a (x - b)^2 + e \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{y - e}{a}} + b = x$$

$$y = c a^x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a \left(\frac{y}{c} \right) = x$$

Was, wenn die Unbekannte keine Zahl, sondern eine Funktion ist?

$$f(t)^2 - \frac{1}{4} = \int_0^t x^3 - x \, dx$$
$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$



Was, wenn nicht nur eine Funktion, sondern auch deren Ableitung in der Gleichung vorkommt?

$$f(x) + f'(x) = 0$$

⇒ Wir können $f(x) = e^{-x}$ als Lösung „erraten“.

Differentialgleichung

Eine *Differentialgleichung* ist eine Gleichung mit Funktionen einer oder mehreren Variablen, die auch Ableitungen dieser Funktionen enthält.

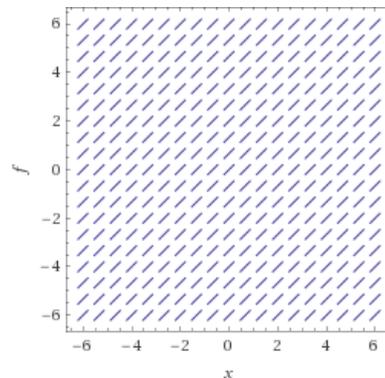
Differentialgleichung

Eine *Differentialgleichung* ist eine Gleichung mit Funktionen einer oder mehreren Variablen, die auch Ableitungen dieser Funktionen enthält.

Beispiel Differentialgleichung:

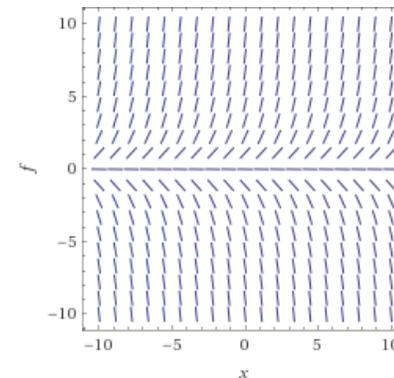
$$f'(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f(x) = a x + c$$



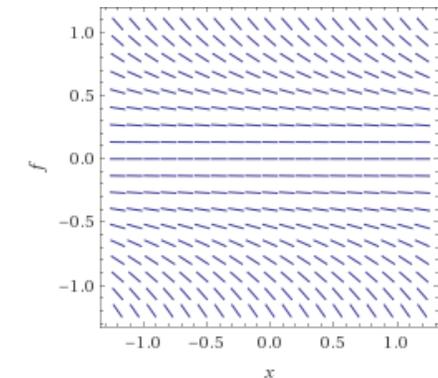
$$f'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = c e^x$$



$$f'(x) = -f(x)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (x + c)^{-1}$$



Um die Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = c e^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

exakt zu bestimmen, benötigen wir mehr Informationen.

Anfangswertproblem

Ein Problem der Form

$$\begin{aligned} f'(t) &= g(t, f(t)) \\ f(t_0) &= f_0 \end{aligned}$$

heißt *Anfangswertproblem* (AWP).

Bevor wir die Lösung bestimmen, als **Mathematiker** fragen wir zuerst:

Für gegebenes g, t_0, f_0 , **existiert** eine Lösung für das AWP und falls ja, ist diese Lösung **eindeutig**?

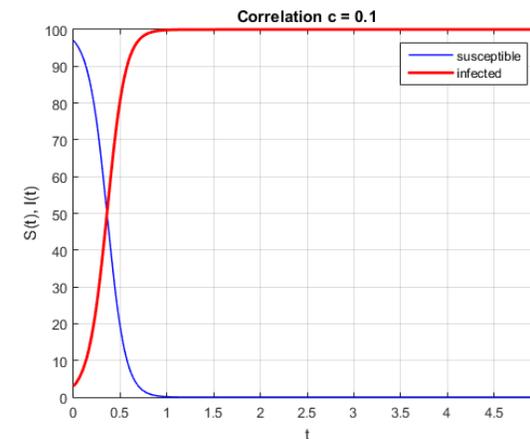
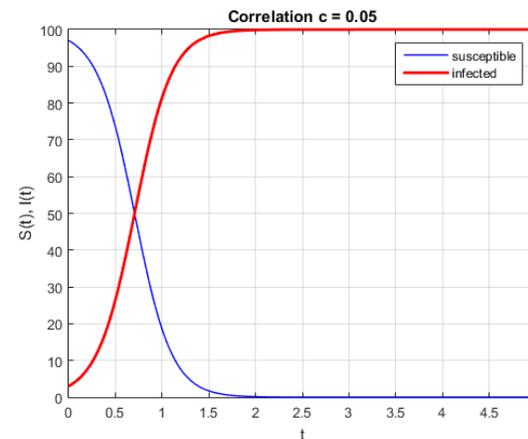
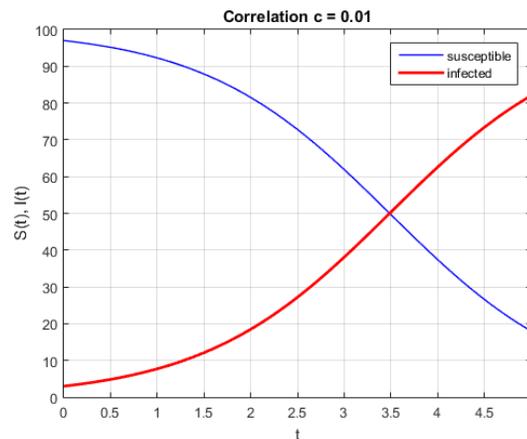
Beispiel: SI-Modell

Beispiel: Krankheitsausbreitung - SI-Modell (susceptible-infected model)

Sei $N(t)$ die (konstante) Bevölkerungsgröße, sei $S(t)$ die Anzahl der gesunden, aber anfälligen Personen und sei $I(t)$ die Anzahl der infizierten Personen jeweils zum Zeitpunkt t .

$$(SI) \quad \begin{cases} S'(t) = -c I(t) S(t) \\ I'(t) = c I(t) S(t) \end{cases}$$

Die Konstante c ist ein Maß für die Wechselwirkung zwischen den Personen. Von 100 Personen seien zu Beginn 3 infiziert ($t_0 = 0$, $S(t_0) = 97$ und $I(t_0) = 3$).



$$(SI) \quad \begin{cases} S'(t) = -c I(t) S(t) \\ I'(t) = c I(t) S(t) \end{cases}$$

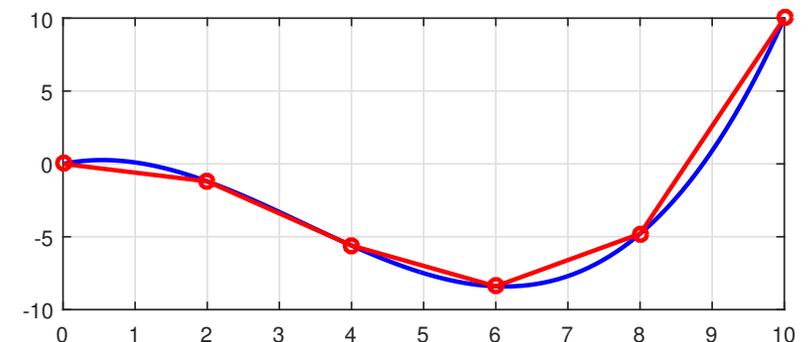
Man kann für das SI-Modell zwar die Existenz einer eindeutigen Lösung zeigen, diese kennt man aber nicht.

Wie berechnet man dann die Lösung?

⇒ numerische Simulation.

Problem dabei: Computer kann im Allgemeinen (noch) keinen Funktionsterm berechnen.

⇒ Approximation der Lösung an sog. Stützstellen,
Zerlege das Zeitintervall $[0, T]$ in Zeitpunkte t_0, t_1, \dots, t_N



Numerische Lösung von DGLs

$$\begin{cases} S'(t) = -c I(t) S(t) \\ I'(t) = c I(t) S(t) \end{cases}$$

Auswertung an der
ersten Stützstellen \rightarrow

$$\begin{cases} S'(t_0) = -c I(t_0) S(t_0) \\ I'(t_0) = c I(t_0) S(t_0) \end{cases}$$

Wir wissen $S(t_0) = 97$ und $I(t_0) = 3$, **aber was ist $S'(t_0)$ und $I'(t_0)$?**

Differenzialquotient

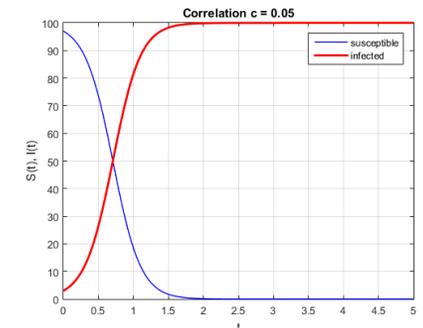
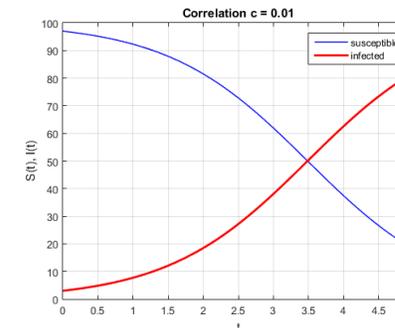
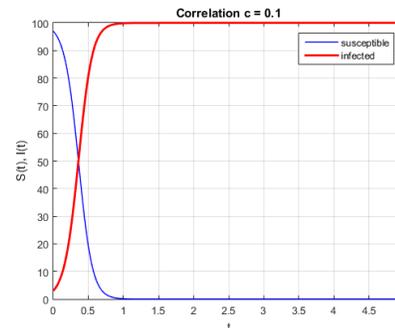
$$S'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

Differenzenquotient

$$S'(t) \approx \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

Nutze den Differenzenquotient:

$$\begin{cases} \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0} = -c I(t_0) S(t_0) \\ \frac{I(t_1) - I(t_0)}{t_1 - t_0} = c I(t_0) S(t_0) \end{cases}$$



Beispiel: SIR-Modell

Beispiel 2: Krankheitsausbreitung - SIR-Modell (susceptible-infected-removed model)

Sei $N(t)$ die Bevölkerungsgröße, sei $S(t)$ die Anzahl der gesunden, aber anfälligen Personen, sei $I(t)$ die Anzahl der infizierten Personen und sei $R(t)$ die Anzahl der resistenten Personen jeweils zum Zeitpunkt t .

Annahme: Jede Person kann nur einmal infiziert werden, danach wird er*sie immun oder stirbt.

$$(SIR) \quad \begin{cases} S' = \nu N - \beta \frac{S I}{N} - \mu S \\ I' = \beta \frac{S I}{N} - \gamma I - \mu I \\ R' = \gamma I - \mu R \end{cases}$$

γ : Rate, mit der Personen genesen

ν : Geburtenrate

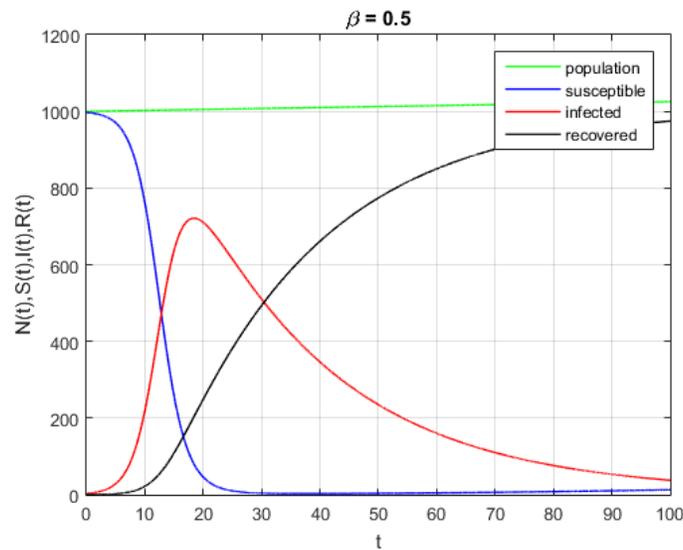
μ : Allgemeine Sterberate

$\frac{\beta}{N}$: Transmissionsrate

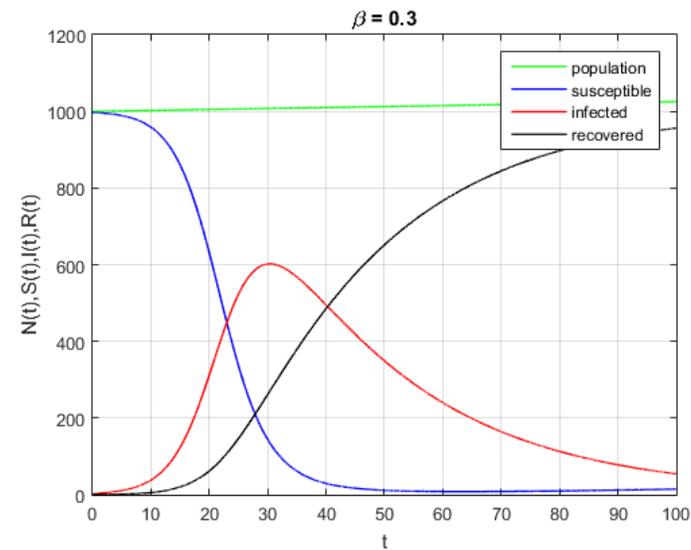
Beispiel: SIR-Modell

Es sei $N(0) = 1000$, $S(0) = 997$, $I(0) = 3$, $R(0) = 0$.

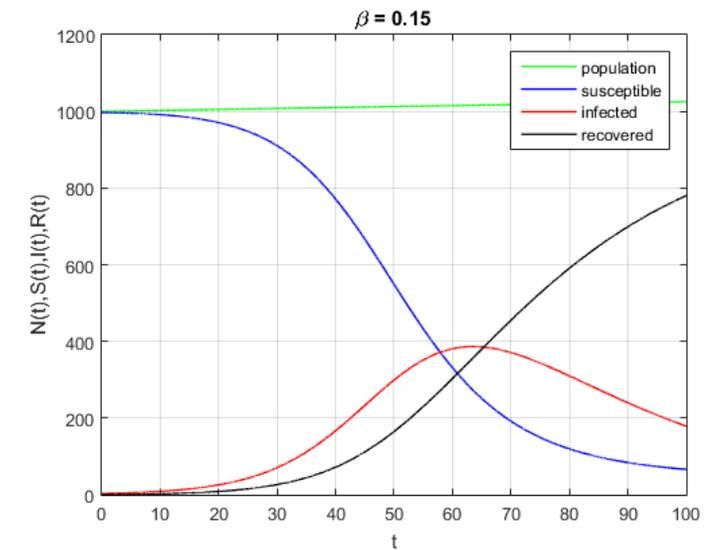
Simulationsergebnisse für $\nu = 0.0005$, $\mu = 0.00025$ und $\gamma = 0.04$:



$\beta = 0.5$



$\beta = 0.3$



$\beta = 0.15$

Inhalte im Studiengang Technomathematik

- Der **mathematische Anteil** ist in den ersten Semestern identisch mit dem Studiengang Mathematik
- Dazu kommen noch Veranstaltungen aus der **Informatik** (Grundlage für die Durchführung von numerischen Simulationen)
- Ab dem 3. Semester kommt das **technische Wahlfach** als Zugang zu den Ingenieurwissenschaften dazu
- Der zugehörige Masterstudiengang heißt **Computational and Applied Mathematics**

Aufbau des Studiengangs Technomathematik

- Der Studiengang besteht aus 180 ECTS, davon 40-45 aus Informatik und dem technischen Wahlfach
- Klassische Wahlfächer sind:
 - Maschinenbau
 - EEI - Elektrotechnik - Elektronik - Informationstechnik
 - Medizintechnik
 - CBI - Chemie- und Bioingenieurwesen
- Die Modulbeschreibungen findet man auf *www.campo.fau.de*
-> Menü -> Studienangebot -> Modulbeschreibungen
- Für Fragen steht die Studienberatung Technomathematik gerne zur Verfügung

Mögliche Vorlesungen aus den (technischen) Wahlfächern

Informatik	Maschinenbau	EEI	Medizintechnik	CBI
Algorithmen und Datenstrukturen 10	Dynamik starrer Körper 7.5	Elektromagnetische Felder 2.5	Informationssysteme im Gesundheitswesen 5	Einführung in die Thermofluiddynamik 5
Konzeptionelle Modellierung 5	Optik und optische Technologien 2.5	Grundlagen der Elektrotechnik I 7.5	Medizintechnik I 5	Wärme- und Stoffübertragung 2.5
Systemnahe Programmierung in C 5	Statik, Elastostatik und Festigkeitslehre 12.5	Grundlagen der Elektrotechnik II 5	Medizintechnik II 5	Grenzflächen in der Verfahrenstechnik 2.5
Einführung in die Systemprogrammierung 5	Technische Schwingungslehre 5	Grundlagen der Elektrotechnik III 5	Signale und Systeme I 5	Computeranwendungen in der Verfahrenstechnik 7.5
Parallele und Funktionale Programmierung 5			Signale und Systeme II 5	Werkstoffkunde 2.5
				Strömungsmechanik 5



Für Fragen steht die Studienberatung Technomathematik gerne zur Verfügung