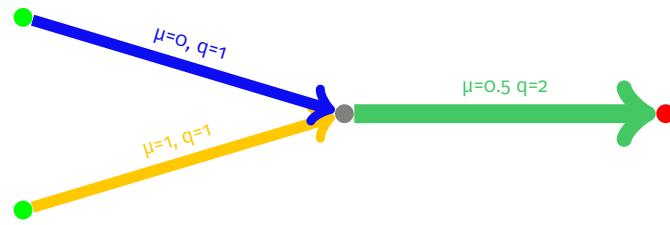


Mathematik von Gasnetzwerken

Energiewende: Von Erdgas zu Wasserstoff

Fachbereich Mathematik

Netzwerk mit Mischung von Erdgas und Wasserstoff



Modellierung eines Gasnetzwerks

Berechnung des Mischungsverhältnisses an Knoten:

Annahme **perfekte Mischung**: Gase mischen sich an Knoten. Das Gas im Rohr ist vollständig vermischt.

$$\mu(v) = \frac{\sum_{a \in I(v)} \mu_a |q_a|}{\sum_{a \in I(v)} |q_a|} \quad \forall v \in V,$$

$$\mu_a = \mu(v) \quad \forall a \in O(v), v \in V.$$

Hier bezeichnet q_a den Wert des Flusses auf dem Rohr mit Index a und μ_a das Mischungsverhältnis des Gases. Die Menge der Rohre mit Einfluss bzw. Ausfluss für Knoten v mit $I(v)$ bzw. $O(v)$ bezeichnet.

Der Druckabfall im Rohr ist abhängig von der Mischung modelliert:

$$p_u^2 - p_v^2 = \lambda c(\mu_a)^2 q_a |q_a| \quad \forall a = (u, v) \in A,$$

$$c(\mu_a)^2 = c_1^2 \mu_a + (1 - \mu_a) c_2^2 \quad \forall a = (u, v) \in A.$$

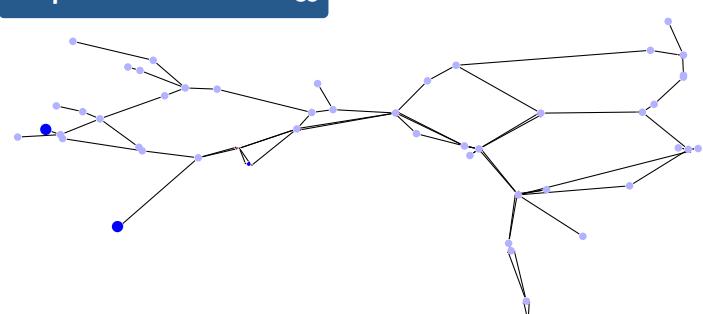
Hier sind c_1 und c_2 die Schallgeschwindigkeiten in den sich mischenden Gasen.

Flusserhaltung an Knoten:

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} q_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} q_a = b_v \quad \forall v \in V.$$

Vervollständigt wird das Modell mit: Gleichungen zur Modellierung von Ventilen, Kompressoren und weitere Elementen.

Beispiel: Ausschnitt GasLib135



Topologie Optimierung: Planung des perfekten Netzwerks

Fragestellung: Was ist das kostengünstigste Netzwerk um z.B. Deutschland mit Gas zu versorgen?

Modellierung als Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A} c_a x_a \\ \text{s.t.} \quad & x_a (p_u^2 - p_v^2) = \Lambda_a q_a |q_a| \quad \forall a = (u, v) \in A, \\ & \sum_{a \in \delta^+(v)} q_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} q_a = b_v \quad \forall v \in V, \\ & x \in \{0, 1\}^A, p \in [0, \bar{p}]^V, q \in \mathbb{R}^A. \end{aligned}$$

Die Variable x_a modelliert ob Rohr a gebaut wurde. Es gilt $x_a = 1$, wenn Rohr a gebaut und sonst $x_a = 0$. Rohr a kostet c_a . Dementsprechend summiert die Zielfunktion die Kosten der gebauten Rohre.

Modellierung des Gases mit Differentialgleichungen

Anpassung der EULER Gleichungen an Mischungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) &= 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p(\rho, \mu)) &= -\Lambda \rho |v| v, \\ \partial_t \mu + v \partial_x \mu &= 0. \end{aligned}$$

ρ = Dichte, v = Flussgeschwindigkeit, p = Druck, Λ = Rohreibung

Optimalsteuerung von Differentialgleichungen

- ▷ Gegeben: Gasnetzwerk beschrieben durch die Euler Gleichungen in allen Rohren
- ▷ Einflussnahme auf den Gasfluss im Netzwerk durch
 - Steuerung von Kompressoren
 - Öffnen und Schließen von Ventilen
 - Veränderung der Flusseigenschaften
- ▷ Darstellung dieser Steuerungsmöglichkeiten als orts- oder zeitabhängige Funktionen in der Variable u
- ▷ Darstellung der Lösung als Vektor $y = (\rho, v, \mu)$

Optimierung in Funktionenraum

$$\min_u J(u) = \int_a^b \psi(y(T, x), y_d(x), x) dx \text{ s.t. } y = y(u) \text{ ist Lösung.}$$

- ▷ Ziel: Das System zum Zeitpunkt T möglichst nah an einen gewünschten Zustand y_d bringen

Weitere Fragestellungen

- ▷ Wie findet man eine optimale Steuerung?
- ▷ Woher wissen wir, dass eine Steuerung optimal ist?
- ▷ Kann der Zustand y_d exakt getroffen werden?
- ▷ Wie schafft man es, dass die Steuerung möglichst günstig ist?