

Modelle und Differentialgleichungen

Zunächst müssen wir unser Problem in eine mathematische Form bringen – das nennt man **Modellierung**. Im Forschungsprojekt Transregio 154 (TRR 154) untersuchen wir das deutsche Gasnetz, und versuchen dessen physikalisches Verhalten mithilfe von Mathematik zu beschreiben.

Dabei machen wir einige Vereinfachungen, zum Beispiel indem wir annehmen, dass das Gas überall die gleiche Temperatur hat (das nennt man **isotherm**). In unserem Modell sind zwei wichtige Konzepte aus der Physik enthalten: **die Erhaltung der Masse und die Erhaltung des Impulses**. Die Gleichungen für ein einzelnes Rohr sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x q &= 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{\rho} + p(\rho) \right) &= f(\rho, q). \end{aligned} \quad (1)$$

Hier beschreibt ρ die Gasdichte, q den Massefluss, p den Druck und f ist eine Reibungskraft. Die Größen ρ, q hängen vom Zeitpunkt t und vom Ort x ab, und ∂_t, ∂_x bezeichnen die partiellen Ableitungen.

Außerdem benötigen wir zwei weitere Informationen: Erstens den Zustand des Systems zu Beginn – die sogenannte **Anfangsbedingung**. Und zweitens, was im Verlauf der Zeit in das System hinein- oder aus ihm herausfließt – die sogenannten **Randbedingungen**.

Es gibt auch kompliziertere Modelle, die zum Beispiel Temperaturänderungen berücksichtigen und auch einfachere Modelle, wie auf dem Poster „Energiewende: Von Erdgas zu Wasserstoff“. Ein Gleichungssystem wie (1) zu **lösen** bedeutet, Funktionen zu finden, die die Gleichungen erfüllen. In den meisten Fällen gibt es keine Formel zum direkten Ausrechnen. Daher wollen wir sogenannte **Näherungslösungen** finden. Dazu müssen wir das Modell zunächst in etwas übersetzen, das ein Computer verstehen kann – dies wird **Diskretisierung** genannt.

Diskretisierung und Simulation

Zuerst müssen wir die unendlich vielen Werte so vereinfachen, dass sie in einem Computer darstellbar sind. Dabei teilen wir das Gebiet in ein Gitter auf und verwenden nur die Werte einer Funktion u an den Gitterpunkten.

Allerdings ist die Berechnung der Ableitungen u' **nicht** mehr exakt möglich. Stattdessen nähern wir sie an.

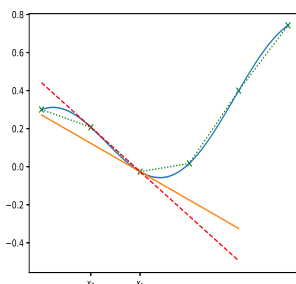
Ein Beispiel: Die Ableitung kann durch die Steigung zwischen zwei Gitterpunkten **approximiert** werden, also durch

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ &\approx \frac{u(x_1) - u(x_0)}{x_1 - x_0}, \end{aligned}$$

für Gitterpunkte x_0, x_1 .

Mit solchen Annäherungen entsteht eine von einem Computer (**numerisch**) lösbare Gleichung.

Eine zentrale Aufgabe der **Numerik** ist es zu zeigen, dass diese Näherungslösung immer näher an die echte Lösung rückt, je feiner das Gitter wird. Allerdings: Je feiner das Gitter, desto aufwändiger die Rechnung. Deshalb ist Effizienz besonders wichtig.

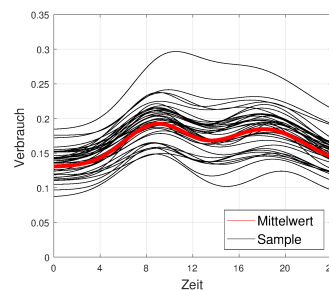


Quantifizierung von Unsicherheiten

Der Druck in Gasnetzwerken darf weder zu hoch noch zu niedrig sein, er muss innerhalb bestimmter Druckschranken bleiben. Der Druck hängt stark vom Gasverbrauch ab, den man oft nicht genau kennt. Deshalb wird der Verbrauch häufig als **zufällige Größe** modelliert.

In der sogenannten **Unsicherheitenquantifizierung (UQ)** untersucht man die Wahrscheinlichkeit, dass kritische Situationen eintreten, zum Beispiel, dass der Gasdruck unter die erlaubte Grenze fällt. Vereinfacht nimmt man an, dass der Verbrauch bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilungen folgt und nur von wenigen Parametern abhängt.

Hier sieht man verschiedene Verläufe des Gasverbrauchs über die Zeit.



Diese Kurven wurden mit Hilfe von 7 zufälligen Parametern erzeugt. Das Modell wurde so angepasst, dass es zu echten Verbrauchsdaten passt – das nennt man auch **fitting**. Gerade bei „Ausreißern“ kann der Druck im Netzwerk zu hoch oder niedrig sein.

Ein häufig verwendeter Ansatz sind die **Monte-Carlo-Methoden**: Dabei schaut man sich viele zufällig erzeugte Szenarien an, um statistische Aussagen zu treffen. Zum Beispiel: „In 21 von 100 Fällen ist der Druck zu niedrig, also mit etwa 21% Wahrscheinlichkeit.“

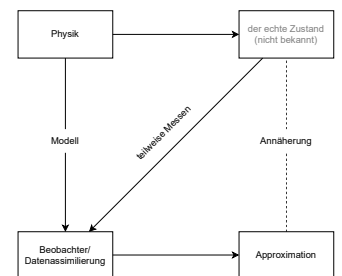
Ein Nachteil dieser Methode ist, dass oft sehr viele Fälle berechnet werden müssen, um verlässliche Aussagen zu treffen. Auch gibt es häufig viele zufällige Parameter (man spricht vom „**Fluch der Dimension**“). Beides führt dazu, dass die Berechnungen sehr aufwändig werden.

Der Beobachter

Wie können wir **den tatsächlichen Zustand** (Druck, Dichte, Impuls) **eines Gasnetzes** kennen, oder zumindest möglichst gut approximieren?

Die Idee: Wir nutzen Messdaten aus der realen Welt, um unsere berechneten Näherungen zu verbessern. Ein Problem dabei ist, dass wir im Gasnetz nicht überall messen können. Deshalb verwenden wir eine Methode namens **Beobachter**: Die Methode soll eine Näherung des tatsächlichen Zustands liefern, auch wenn nur an wenigen Stellen Daten vorliegen. Das Diagramm zeigt wie dies funktioniert.

Der echte Zustand des Gasnetzes ist unbekannt. Messdaten liefern nur an ausgewählten Punkten Informationen. Weiterhin verwenden wir ein vereinfachtes Modell (wie aus dem ersten Abschnitt). Durch Kombination von Modell und Messdaten entsteht eine verbesserte Schätzung des tatsächlichen Zustandes – dies nennt man **Datenassimilierung**.



Mathematik erlaubt uns herauszufinden, wie viele Messpunkte wir brauchen, damit garantiert ist, dass **der Fehler** zwischen der Approximation und dem realen Zustand **im Laufe der Zeit sehr schnell kleiner wird**.